La symphonie des cercles circonscrits

Attention ! Dans cet article, il est important de garder la tête droite sans tourner en rond.

Auteurs : Benoit Chanceaux[*], Clara Feurtet[*], Enki Souillot[†]

Encadrants : Olivier Couture[‡], Frédéric Métin[§], Patrick Tardivel[‡]

Avant de commencer votre lecture, nous vous suggérons de visionner la vidéo, qui vient compléter l'article, disponible au lien suivant : https://www.youtube.com/watch?vFTLKorfHvzc

De nombreux théorèmes en mathématiques sont bien connus, d'autres sont insoupçonnés... Et pourtant beaucoup d'entre eux ne demandent que peu de connaissances mathématiques pour les comprendre. Partant de notions simples, notre objectif est de remettre au jour des théorèmes ignorés. Faisons un petit tour dans une branche bien connue : **la géométrie**.

La géométrie euclidienne[1] est enseignée à des degrés d'approfondissement divers dès l'école primaire avec l'étude de quelques polygones. Nous allons commencer par l'un des théorèmes clés accessible à tout collégien : **le cercle circonscrit à un triangle**.
Considérons trois droites en position générale[2]. Ce système de droites forme un triangle non plat dans lequel chaque sommet est le point d'intersection d'une paire de droites. L'unique cercle passant par ces sommets est le cercle circonscrit à ce triangle. La construction est rappelée à la Figure 1.

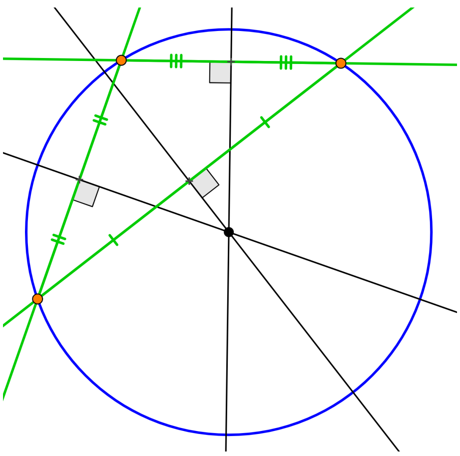


Figure 1 – (Cercle circonscrit à un triangle). Les droites vertes, en position générale, forment un triangle dont les sommets sont les points oranges. Le cercle circonscrit à ce triangle est en bleu. Son centre est le point d'intersection des trois médiatrices en noir associées à chaque côté du triangle.

Complexifions la figure en considérant quatre droites en position générale, ainsi que les quatre cercles circonscrits associés à chaque triplet de droites. Une fois la construction finie, nous observons un résultat intrigant : les cercles sont concourants en un point. Voilà le théorème qui décrit cette configuration :

*Benoit Chanceaux et Clara Feurtet, étudiants en master MEEF (Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation) à l'université de Bourgogne, sont les auteurs principaux de l'article.

†Enki Souillot, étudiant à l'université Grenoble Alpes, a participé à l'écriture du manuscrit.

‡Olivier Couture et Patrick Tardivel, maîtres de conférence à l'université de Bourgogne-Franche-Comté à Dijon, ont participé à l'écriture et à la relecture du manuscrit.

§ Frédéric Métin, professeur certifié affecté dans l'enseignement supérieur à l'université Bourgogne-Franche-Comté à Dijon, a participé à l'écriture et à la relecture du manuscrit.

1. La géométrie euclidienne doit son nom à Euclide, mathématicien de la Grèce antique. Il s'agit de la géométrie telle qu'on l'étudie jusqu'en classe de terminale.
2. Des droites sont en position générale s'il n'y a pas de paire de droites parallèles ni de triplet de droites concourantes.

Théorème (Point de Miquel). *Soit quatre droites en position générale dans le plan. Alors, les cercles circonscrits aux triangles formés par chaque triplet de droites sont concourants en un point, appelé* ***point de Miquel****.*

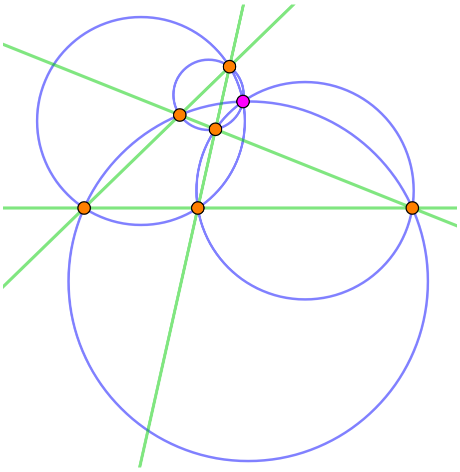


FIGURE 2 – (Point de Miquel). Les quatre droites vertes sont en position générale. Chacun des quatre triplets de droites forme un triangle qui possède un cercle circonscrit. Ces cercles circonscrits, en bleu, se coupent au point de Miquel en rose.

On pourra désormais dire qu'à un quadruplet de droites (en position générale), on associe un point de Miquel. Le théorème du point de Miquel peut se démontrer de plusieurs manières différentes. Une des démonstrations peut se faire à l'aide de la géométrie projective ([1] page 348), une autre avec les angles orientés ([2] page 243), mais il est intéressant de voir la démonstration classique faisant appel à la droite de Steiner [3].

Théorème (Droite de Seiner). *Un point appartient au cercle circonscrit à un triangle si et seulement si les symétriques de ce point par rapport aux côtés du triangle sont alignés.*
La droite passant par les symétriques d'un point se situant sur le cercle circonscrit à un triangle est appelée ***droite de Steiner*** *de ce point.*

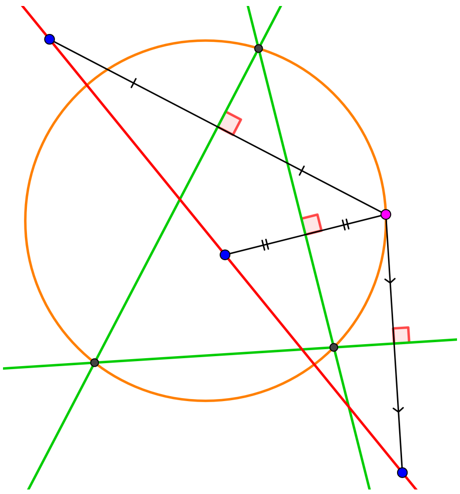


FIGURE 3 – (Droite de Steiner). Le point rose est sur le cercle circonscrit orange au triangle formé par les droites vertes. Ainsi, d'après le théorème précédent, les trois symétriques du point rose par rapport aux côtés du triangle sont alignés. La droite rouge passant par ces points, est la droite de Steiner du point rose.

On admettra ce résultat dont une démonstration est donnée, par exemple, à la page 344 du livre [2]. Grâce à cette droite, il devient assez simple de démontrer le théorème du point de Miquel. En voici une démonstration.

3. Nous proposons en annexe aux enseignants en collège une activité sur la droite de Steiner et le point de Miquel susceptible d'être exploitée en classe.

Démonstration (Point de Miquel) : Soient d_1, d_2, d_3 et d_4, quatre droites en position générale. On note $C_{1,2,3}$ le cercle circonscrit au triangle formé par les droites d_1, d_2 et d_3. De même, on note $C_{1,2,4}$, $C_{2,3,4}$ et $C_{1,3,4}$ les autres cercles circonscrits associés aux trois autres triplets de droites.
Considérons $C_{1,2,3}$ et $C_{1,2,4}$ et notons M le point d'intersection de ces cercles qui n'est pas le point de concourt des droites d_1 et d_2 [4]. Comme M appartient au cercle circonscrit $C_{1,2,3}$, d'après le théorème de la droite de Steiner, les symétriques M_1, M_2 et M_3 du point M par rapport aux droites d_1, d_2 et d_3 sont alignés. De même, comme M appartient à $C_{1,2,4}$, les points M_1, M_2 et M_4 sont alignés. Ainsi, les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont alignés (sur la droite (M_1M_2)) [5].
Enfin, comme les points M_1, M_3, M_4 et M_2, M_3, M_4 sont alignés, par le théorème de la droite de Steiner, on en déduit que le point M appartient également aux cercles $C_{1,3,4}$ et $C_{2,3,4}$. Donc M appartient aux quatre cercles circonscrits.

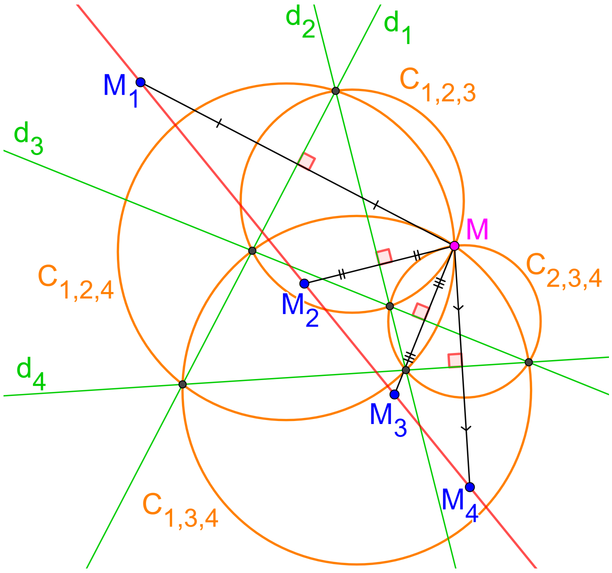


FIGURE 4 – (Alignement des symétriques). Cette figure complète la Figure 2 en ajoutant les symétriques M_1, M_2, M_3 et M_4 par rapport aux droites d_1, d_2, d_3 et d_4 respectivement. L'alignement des points M_1, M_2, M_3 et M_4 est la clé de voûte pour démontrer que les quatre cercles circonscrits sont concourants en un point.

□

Continuons notre périple géométrique en compliquant légèrement la figure. Nous savons déjà qu'avec trois droites en position générale, on peut former un triangle et son cercle circonscrit. Nous venons de voir qu'en rajoutant une droite à ce système, il existait alors quatre cercles concourants en un point : le Point de Miquel. En ajoutant une cinquième droite au système, nous allons construire un cercle particulier (ou une droite particulière) associé à ces droites : le cercle-droite de Miquel.
Avec cinq droites, il est possible de faire cinq groupes de quatre droites (un quadruplet de droites s'obtient en retirant une droite et il y a cinq façons possibles de retirer une droite parmi les cinq). Dans un système de cinq droites, il y a donc cinq points de Miquel, chacun associé à un quadruplet de droites.

4. Remarquons que les deux cercles $C_{1,2,3}$ et $C_{1,2,4}$ s'intersectent bien en exactement deux points distincts. En effet, si les cercles $C_{1,2,3}$ et $C_{1,2,4}$ sont tangents en M, l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre M qui envoie $C_{1,2,3}$ sur $C_{1,2,4}$ transforme également d_3 en d_4. Donc les droites d_3 et d_4 sont parallèles, ce qui est exclu. (au besoin, l'ouvrage [3] page 59 pour plus de détails).

5. Les points M_1 et M_2 sont distincts.
En effet, s'ils étaient confondus, cela impliquerait que les projetés orthogonaux, P_1 et P_2 du point M sur d_1 et d_2 respectivement, appartiennent à la fois à d_1 et à d_2. La seule possibilité pour avoir cette condition est que le point M se situe à l'intersection de d_1 et d_2. Or cela est impossible, d'après la note 4.

Théorème (Cercle-droite[6] de Miquel). *Pour cinq droites en position générale dans le plan, les cinq points de Miquel associés aux cinq quadruplets de droites, sont cocycliques, alignés ou confondus.*

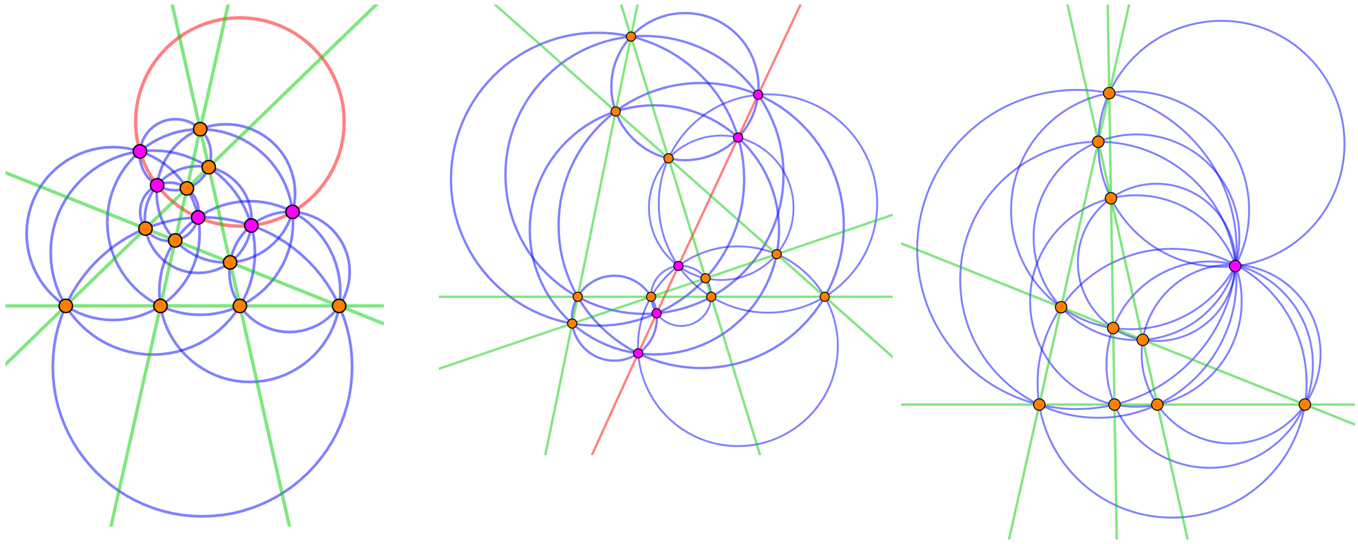


FIGURE 5 – (Cercle-droite de Miquel). Les trois figures montrent tous les éléments nécessaires pour la construction du cercle-droite de Miquel (en rouge). Les cinq droites en position générale (en vert), les points d'intersection associés aux dix ($\binom{5}{2} = 10$) paires de droites (en orange), les cercles circonscrits associés aux dix ($\binom{5}{3} = 10$) triplets de droites (en bleu), les points de Miquel associés aux cinq ($\binom{5}{4} = 5$) quadruplets de droites (en rose). Finalement, le cercle-droite de Miquel peut être un cercle (image de gauche), une droite (image du milieu) ou bien un point lorsque les cinq points de Miquel sont confondu (image de droite).

Ainsi, à partir de cinq droites, on construit dix $(\binom{5}{3} = 10)$ cercles circonscrits aux dix triangles formés par ces droites. De cette construction découle cinq $(\binom{5}{4} = 5)$ points de Miquel, cocycliques, alignés ou confondus ! Voici une élégante illustration de la beauté de la géométrie classique.
Ensuite de la même manière, à partir de six droites, on construit six $(\binom{6}{5} = 6)$ cercles-droites de Miquel et ces cercles-droites sont concourants : c'est le point d'orgue de cette symphonie des cercles circonscrits.

6. Les cinq points de Miquel peuvent être soit sur un même cercle (éventuellement de rayon nul), soit sur une même droite, d'où ce nom.

Théorème (Point de Clifford). *Pour six droites en position générale, les six cercles-droites de Miquel associés aux six quintuplets de droites sont concourants en un point.*

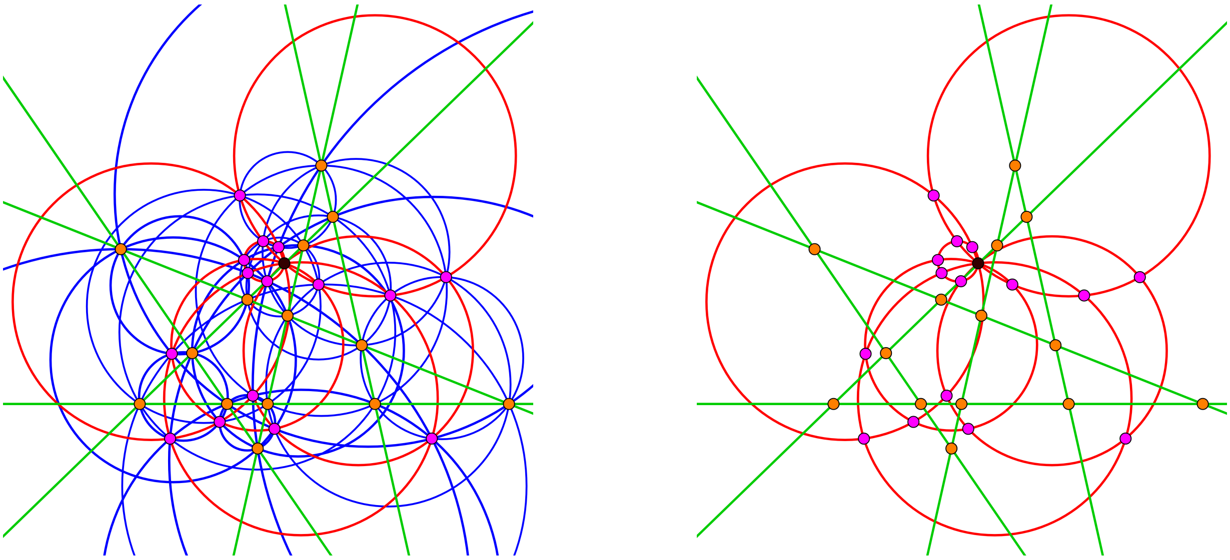


Figure 6 – La figure de gauche montre tous les éléments nécessaires pour la construction du point de Clifford (en noir). Les six droites en position générale (en vert), les points d'intersection associés aux quinze ($\binom{6}{2} = 15$) paires de droites (en orange), les cercles circonscrits associés aux vingt ($\binom{6}{3} = 20$) triplets de droites (en bleu), les points de Miquel associés aux quinze ($\binom{6}{4} = 15$) quadruplets de droites (en rose) et les cercle-droites de Miquel associés aux six ($\binom{6}{5} = 6$) quintuplets de droites (en rouge). Finalement, le point de Clifford est le point d'intersection des cercles-droites de Miquel. La figure de droite est plus synthétique : il n'y a pas les cercles circonscrits. On remarque que les cercle-droites de Miquel s'intersectent tous au point noir.

En annexe, nous donnons la preuve du théorème qui établit l'existence du cercle-droite de Miquel. En revanche, cette symphonie des cercles et des points reste inachevée. Nous ne donnerons pas la preuve du théorème sur le point de Clifford, cette démonstration est trop technique pour cet article et nécessite d'introduire la géométrie dite inversive. Pour cette géométrie, les droites sont des cercles particuliers, ainsi l'alignement et la cocyclicité sont des notions équivalentes.

Nous achèverons cette symphonie des cercles circonscrits dans un futur article. Dans celui-ci, nous introduirons la notion de point central qui généralise le point de Miquel pour $n = 4$ droites et le point de Clifford pour $n = 6$ droites à un nombre pair de droites en position générale. Nous introduirons également la notion de cercle-droite central qui généralise le cercle circonscrit pour $n = 3$ droites et le cercle-droite de Miquel pour $n = 5$ droites à un nombre impair de droites en position générale. Le lecteur curieux et impatient peut néanmoins consulter le livre de Boyer [1] pages 348 à 350 et regarder la vidéo donnée au lien suivant https://cutt.ly/638sBhY.

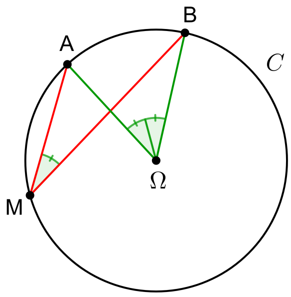
Annexe

Pour démontrer le cas de cinq droites, les choses deviennent un peu plus compliquées.
Un objet essentiel en géométrie est le birapport que l'on définit à travers le théorème suivant qui était au programme de troisième il y a quelques années :

Théorème (Angle au centre). *Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω, et A et B deux points de $\mathcal{C}$ distincts. Si un point M du plan appartient au cercle $\mathcal{C}$, alors*

$$2\,\mathrm{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \quad \mathrm{mod}\ 2\pi$$

où $\mathrm{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ désigne une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ en radians.

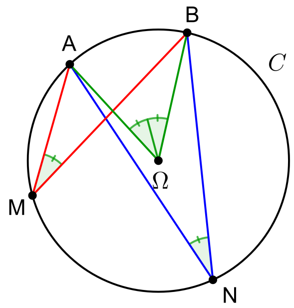


De ce théorème découle un résultat très fort : **le théorème de l'angle inscrit**.

Théorème (Angle inscrit). *Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω, A et B deux points distincts de $\mathcal{C}$. Si M et N sont deux points de $\mathcal{C}\backslash\{A, B\}$ alors*

$$\mathrm{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \mathrm{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \quad \mathrm{mod}\ \pi$$

En effet, d'après le théorème de l'angle au centre, on a :



$$2\,\mathrm{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \quad \mathrm{mod}\ 2\pi.$$
$$2\,\mathrm{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = \mathrm{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \quad \mathrm{mod}\ 2\pi.$$

D'où :

$$\mathrm{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \mathrm{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \quad \mathrm{mod}\ \pi.$$

Si on se place dans le plan complexe $\mathbb{C}$ et que l'on note a, b, m et n les affixes respectives des points A, B, M et N, comme les points M et N sont bien distincts de A et de B, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathrm{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \mathrm{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \quad \mathrm{mod}\ \pi &\iff \arg\left(\frac{m-a}{m-b}\right) = \arg\left(\frac{n-a}{n-b}\right) \quad \mathrm{mod}\ \pi \\ &\iff \frac{m-a}{m-b} \times \frac{n-b}{n-a} \in \mathbb{R}^*. \qquad (1)\end{aligned}$$

La quantité $[A, B, M, N]$ définie par $[A, B, M, N] = \dfrac{m-a}{m-b} \times \dfrac{n-b}{n-a}$ s'appelle le birapport des quatre points A, B, M et N.

Remarque. Si deux points $M(m)$ et $N(n)$ de $\mathbb{C}$ appartiennent à la droite (AB) et sont distincts de $A(a)$ et de $B(b)$, alors $\mathrm{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \mathrm{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \quad \mathrm{mod}\ \pi$, donc le birapport $[A, B, M, N]$ est réel.

☞ Autrement dit, si quatre points distincts sont sur un même cercle ou une même droite, alors leur birapport est réel.

La réciproque est également vraie. Elle se démontre à l'aide du théorème de l'angle au centre et du théorème de l'angle de la tangente (qui est un cas limite du théorème de l'angle au centre).

☞ Par la suite, nous utiliserons le résultat suivant :

Le birapport $\left[A, B, C, D\right]$ de quatre points distincts A, B, C et D, est réel si et seulement si les points A, B, C et D sont cocycliques ou alignés.

Avant de démontrer le théorème du cercle-droite de Miquel, nous devons faire appel à un théorème qui nous sera nécessaire pour la suite.

Théorème (Six cercles). *Soit $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ quatre cercles tels que :*

— *$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ s'intersectent en deux points distincts A_1 et B_1 ;*
— *$\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ s'intersectent en deux points distincts A_2 et B_2 ;*
— *$\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ s'intersectent en deux points distincts A_3 et B_3 ;*
— *$\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$ s'intersectent en deux points distincts A_4 et B_4.*

Si les points A_1, A_2, A_3 et A_4 sont distincts et cocycliques (ou alignés), alors B_1, B_2, B_3, B_4 sont cocycliques (ou alignés).

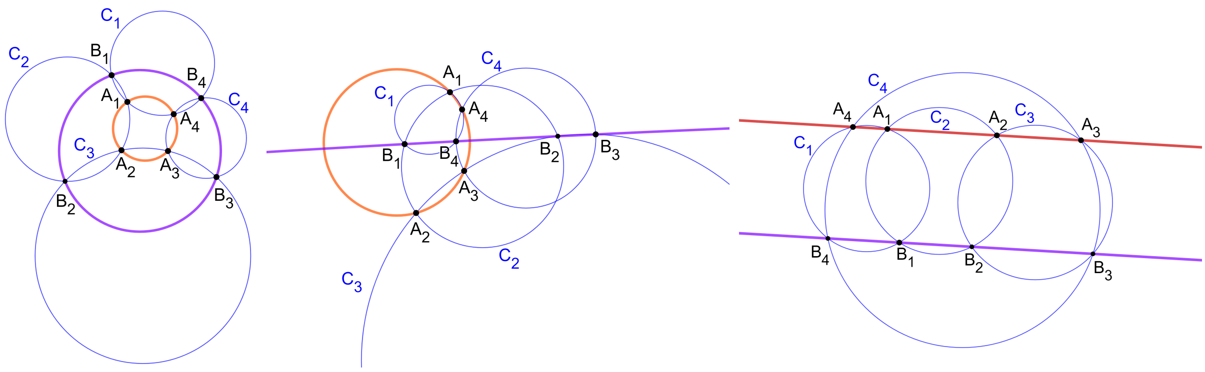


FIGURE 7 – Cette figure illustre les trois cas possibles du théorème des six cercles. Premier cas (à gauche) : les deux quadruplets A_1, A_2, A_3, A_4 et B_1, B_2, B_3, B_4 sont cocycliques. Deuxième cas (au centre) : l'un des quadruplets a des points cocycliques et l'autre quadruplet a des points alignés. Troisième cas (à droite) : les deux quadruplets A_1, A_2, A_3, A_4 et B_1, B_2, B_3, B_4 ont leurs points alignés.

Ce théorème se montre facilement avec le birapport.

Démonstration. Comme A_1, B_1, A_4 et B_4 sont sur $\mathcal{C}_1$, $[A_1, B_4, A_4, B_1]$ est réel. De même pour :

$$[A_2, B_1, A_1, B_2], \quad [A_3, B_2, A_2, B_3], \quad [A_4, B_3, A_3, B_4] \quad \text{sur } \mathcal{C}_2,\ \mathcal{C}_3,\ \mathcal{C}_4 \text{ respectivement.}$$

Ainsi, le rapport $W = \frac{[A_2,B_1,A_1,B_2]\times[A_4,B_3,A_3,B_4]}{[A_3,B_2,A_2,B_3]\times[A_1,B_4,A_4,B_1]}$ est réel.

Par un simple calcul, on a : $W = [A_1, A_3, A_2, A_4] \times [B_2, B_4, B_1, B_3]$ réel.

Par conséquent, si A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques ou alignés, $[A_1, A_3, A_2, A_4]$ est réel, et donc $[B_2, B_4, B_1, B_3]$ l'est aussi. Ainsi B_1, B_3, B_2 et B_4 sont cocycliques ou alignés. □

☞ Maintenant, nous avons tous les outils nécessaires pour démontrer l'existence du cercle-droite de Miquel.

Théorème (Cercle-droite de Miquel). *Pour cinq droites en position générale dans le plan, les cinq points de Miquel associés aux cinq quadruplets de droites sont cocycliques ou alignés.*

Démonstration : cercle-droite de Miquel. Pour cinq droites : d_1, d_2, d_3, d_4 et d_5 en position générale :

✎ On note $P_{i,j}$ le point d'intersection des deux droites d_i et d_j.

✎ On rappelle que $C_{i,j,k}$ est le cercle circonscrit au triangle dont les sommets sont $P_{i,j}$, $P_{i,k}$ et $P_{j,k}$.

✎ On note $P_{i,j,k,l}$ le point de Miquel déterminé par les droites d_i, d_j, d_k et d_l ; autrement dit, le point d'intersection des cercles $C_{j,k,l}, C_{i,k,l}, C_{i,j,l}, C_{i,j,k}$.
Exemple : on note $P_{1,2,3,4}$ le point de Miquel construit à partir des quatre droites d_1, d_2, d_3 et d_4. Il y a cinq points de Miquel.

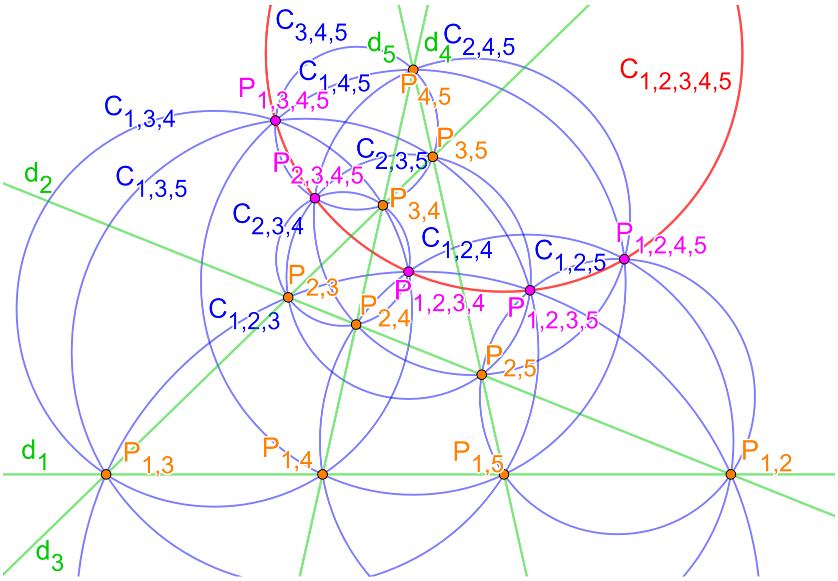


FIGURE 8 – Illustration des notations appliquées à la démonstration du théorème du cercle-droite de Miquel.

➥ Cas 1 : Au moins deux points de Miquel sont confondus.

Dans le cas où deux points de Miquel sont confondus, par exemple $P_{1,2,3,4}$ et $P_{2,3,4,5}$, les sept cercles circonscrits $C_{1,2,3}, C_{2,3,4}, C_{1,3,4}, C_{1,2,4}, C_{3,4,5}, C_{2,4,5}$ et $C_{2,3,5}$, permettant de construire ces deux points de Miquel, sont concourants en un point.
D'après la note 4, les deux points de Miquel $P_{1,2,3,4}$ et $P_{2,3,4,5}$ sont distincts des points $P_{3,4}$, $P_{2,4}$ et $P_{2,3}$. Comme :

→ $C_{1,3,4}$ et $C_{3,4,5}$ s'intersectent aussi en $P_{1,3,4,5}$ et $P_{3,4}$;

→ $C_{1,2,4}$ et $C_{2,4,5}$ s'intersectent aussi en $P_{1,2,4,5}$ et $P_{2,4}$;

→ $C_{1,2,3}$ et $C_{2,3,5}$ s'intersectent aussi en $P_{1,2,3,5}$ et $P_{2,3}$;

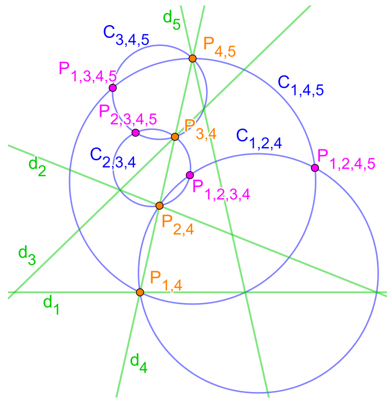
On en déduit que les cinq points de Miquel sont confondus. Ainsi, ils sont situés sur un cercle réduit en un point.

➥ Cas 2 : Les points de Miquel sont distincts deux à deux.

On veut montrer que cinq droites déterminent un cercle-droite de Miquel, ce qui revient à montrer que $P_{1,2,3,4}, P_{2,3,4,5}, P_{1,3,4,5}, P_{1,2,4,5}$ et $P_{1,2,3,5}$ sont cocycliques ou alignés. Comme les cinq points de Miquel et les points d'intersection des droites d_i sont tous deux à deux distincts, nous allons pouvoir utiliser le théorème des six cercles.

Montrons la cocyclicité ou l'alignement des points $P_{1,2,3,4}$, $P_{2,3,4,5}$, $P_{1,3,4,5}$ **et** $P_{1,2,4,5}$:
Considérons les quatre cercles $C_{1,2,3}$, $C_{1,2,4}$, $C_{1,3,4}$ et $C_{2,3,4}$.

- → $C_{1,2,4}$ et $C_{2,3,4}$ s'intersectent en $P_{1,2,3,4}$ et $P_{2,4}$;
- → $C_{2,3,4}$ et $C_{3,4,5}$ s'intersectent en $P_{2,3,4,5}$ et $P_{3,4}$;
- → $C_{3,4,5}$ et $C_{1,4,5}$ s'intersectent en $P_{1,3,4,5}$ et $P_{4,5}$;
- → $C_{1,4,5}$ et $C_{1,2,4}$ s'intersectent en $P_{1,2,4,5}$ et $P_{1,4}$.



Or $P_{2,4}$, $P_{3,4}$, $P_{4,5}$ et $P_{1,4}$ appartiennent à d_4, donc en vertu du **théorème des six cercles**, les quatre points $P_{1,2,3,4}$, $P_{2,3,4,5}$ $P_{1,3,4,5}$ et $P_{1,2,4,5}$ sont cocycliques ou alignés.

Les mêmes arguments s'appliquent aux quatre points $P_{2,3,4,5}$, $P_{1,3,4,5}$, $P_{1,2,4,5}$ et $P_{1,2,3,5}$ qui sont donc également cocycliques ou alignés.

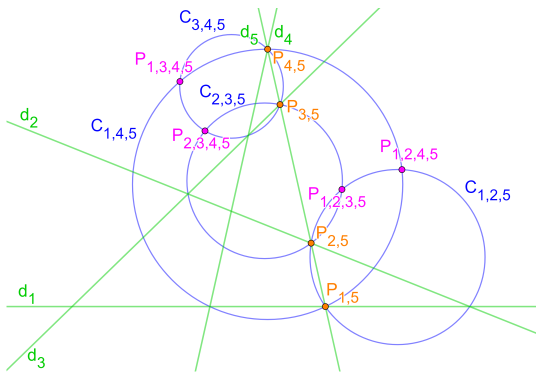


Figure 9 – Cette figure montre les éléments géométriques utiles pour établir l'alignement ou la cocyclicité des points de Miquel $P_{2,3,4,5}$, $P_{1,3,4,5}$, $P_{1,2,4,5}$ et $P_{1,2,3,5}$. En effet, par construction les points $P_{1,5}$, $P_{2,5}$, $P_{3,5}$ et $P_{4,5}$ sont sur la droite d_5 donc, d'après le théorème des six cercles, les points $P_{2,3,4,5}$, $P_{1,3,4,5}$, $P_{1,2,4,5}$ et $P_{1,2,3,5}$ sont cocycliques ou alignés.

Ainsi $P_{1,2,3,4}$, $P_{2,3,4,5}$, $P_{1,3,4,5}$ et $P_{1,2,4,5}$ sont cocycliques ou alignés, de même que $P_{2,3,4,5}$, $P_{1,3,4,5}$, $P_{1,2,4,5}$ et $P_{1,2,3,5}$. Or les trois points, $P_{2,3,4,5}$, $P_{1,3,4,5}$ et $P_{1,2,4,5}$ sont en commun dans les deux quadruplets ; on en déduit que les cinq points de Miquel $P_{1,2,3,4}$, $P_{2,3,4,5}$, $P_{1,3,4,5}$, $P_{1,2,4,5}$ et $P_{1,2,3,5}$ sont tous cocycliques ou alignés.

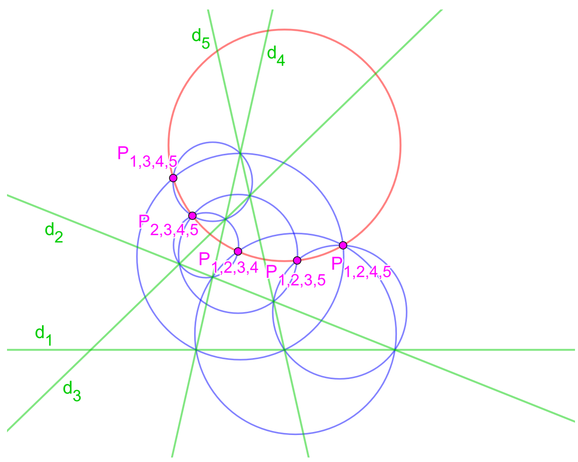


Figure 10 – En superposant les figures 8 et 9 on observe que les cinq points de Miquel sont cocycliques ou alignés.

Travaux pratiques : Caractérisation des points appartenant au cercle circonscrit d'un triangle

1. Sur GeoGebra, construire un triangle ABC et son cercle circonscrit $\mathcal{C}_{ABC}$. Placer un point M sur $\mathcal{C}_{ABC}$ puis construire $M'_{(AB)}, M'_{(AC)}$ et $M'_{(BC)}$ les symétriques de M par rapport aux droites $(AB), (AC)$ et (BC). Déplacer le point M sur le cercle $\mathcal{C}_{ABC}$. Que remarque-t-on ? Énoncer une propriété qui traduit cette expérience numérique.
2. Dans une nouvelle fenêtre, construire un triangle ABC et son cercle circonscrit $\mathcal{C}_{ABC}$. Placer à présent un point N hors du cercle $\mathcal{C}_{ABC}$ puis construire $N'_{(AB)}, N'_{(AC)}$ et $N'_{(BC)}$ les symétriques de N par rapport aux droites $(AB), (AC)$ et (BC). Déplacer le point N. Quelle différence observe-t-on par rapport à la question 1 ? Énoncer une propriété qui traduit cette expérience numérique.

Travail d'approfondissement : Cercles circonscrits et point de Miquel

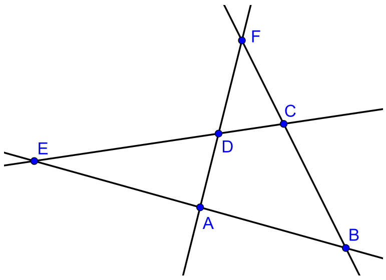
Durant les travaux pratiques nous avons montré les propriétés suivantes :

Propriété. Soit ABC un triangle non plat et $\mathcal{C}_{ABC}$ son cercle circonscrit. Si $M \in \mathcal{C}_{ABC}$ alors les symétriques $M'_{(AB)}, M'_{(AC)}$ et $M'_{(BC)}$ de M par rapport aux droites $(AB), (AC)$ et (BC) sont alignés.

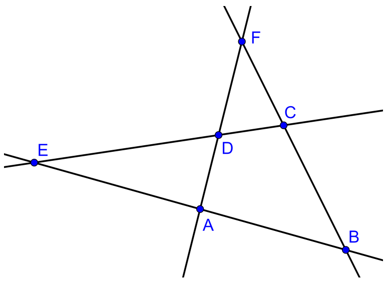
Propriété. Soit ABC un triangle non plat, $\mathcal{C}_{ABC}$ son cercle circonscrit, M un point du plan et $M'_{(AB)}, M'_{(AC)}$ et $M'_{(BC)}$ de M les symétriques du point M par rapport aux droites $(AB), (AC)$ et (BC). Si $M'_{(AB)}, M'_{(AC)}$ et $M'_{(BC)}$ sont alignés alors M est un point du cercle circonscrit $\mathcal{C}_{ABC}$.

On considère 4 droites en position quelconque. Ces droites délimitent 4 triangles : EAD, EBC, FDC, FAB.

1. Sur la figure 1 construire :
   - les cercles circonscrits $\mathcal{C}_{EAD}$ et $\mathcal{C}_{FDC}$ aux triangles EAD et FDC. On pose M le point d'intersection de $\mathcal{C}_{EAD}$ et $\mathcal{C}_{FDC}$ qui n'appartient à aucune des 4 droites ;
   - les points $M'_{(AB)}, M'_{(BC)}$ et $M'_{(CD)}$ et $M'_{(DA)}$ symétriques du point M par rapport aux droites $(AB), (BC), (CD)$ et (DA).



2. En utilisant la propriété 1, montrer que les points $M'_{(AB)}, M'_{(BC)}$ et $M'_{(CD)}$ et $M'_{(DA)}$ sont alignés.
3. On note $\mathcal{C}_{EBC}$ le cercle circonscrits aux triangles EBC. En utilisant la propriété 2, montrer que le point M appartient à $\mathcal{C}_{EBC}$.[7]
4. Sur la figure 2 construire : les cercles circonscrits $\mathcal{C}_{EAD}, \mathcal{C}_{FDC}, \mathcal{C}_{EBC}$ et $\mathcal{C}_{FAB}$ aux triangles EAD, FDC, EBC et FAB.



5. Que peut-on dire des cercles $\mathcal{C}_{EAD}, \mathcal{C}_{FDC}, \mathcal{C}_{EBC}$ et $\mathcal{C}_{FAB}$? Justifier en utilisant les questions précédentes.

□

7. On peut montrer de façon similaire que M appartient au cercle circonscrit $\mathcal{C}_{FAB}$ du triangle FAB.

La symphonie continue

L'article 1 évoquait une sorte de cycle concernant les droites, les cercles et les points. Ceci nous amène au cœur de cet article : la récurrence de Clifford. C'est finalement ce même Clifford qui a donné son nom aux cas à 6 et 7 droites, qui donna la solution à ce qui ressemblait vaguement à une récurrence.

En ce qui concerne les notations, nous allons généraliser ce dont nous parlons depuis le début, nous appellerons :

"points central d'ordre n" le points construit à la façon "Point de Miquel" ou "Point de Clifford", où n designe le nombre de droites. Par exemple le point de Miquel est un point central d'ordre 4 et le point de Clifford un point central d'ordre 6.
"cercle central d'ordre n" le cercle (ou la droite) construit à la façon "Cercle-droite de Miquel" ou "Cercle-droite de Clifford", où n désigne une nouvelle fois le nombre de droites. Par exemple le cercle circonscrit est un cercle central d'ordre 3 et le cercle (ou la droite) de Miquel est un cercle central d'ordre 5.

Parlons un peu de cette récurrence avant de l'énoncer. Nous entrons ici dans le niveau le plus ardu[8] de cet article. Il va être nécessaire de différencier le cas pair du cas impair. En effet, comme nous l'avons remarqué, si le nombre de droites, noté n, est impair (par exemple $3, 5, 7$), alors il existe un cercle central d'ordre n passant par les n points centraux d'ordre $n-1$[9]. Lorsque n est pair (par exemple $4, 6$), on peut construire un point central d'ordre n à l'intersection des cercles centraux d'ordre $n-1$. Plus précisément, en voici l'énoncé :

Théorème (Récurrence de Clifford). *Tout système de n ($n \geq 3$) droites en position générale dans le plan détermine :*

- *Un cercle central, si n est impair, qui passe par les n points centraux d'ordre $n-1$.*
- *Un point central, si n est pair, qui est l'intersection des n cercles centraux d'ordre $n-1$.*

Cet énoncé est bien barbare pour généraliser toute cette notion, mais ceci est souvent le cas des généralisations en mathématiques...

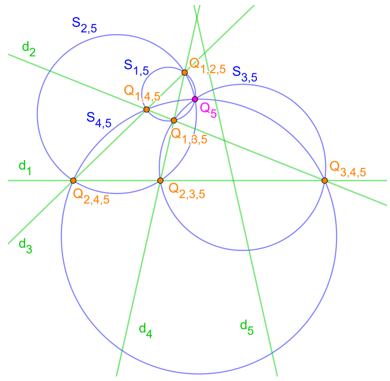
Remarque. On peut d'ailleurs généraliser encore plus ce théorème. Deux droites en position générale peuvent être vues comme deux cercles-droites, se coupant en deux points doubles, l'un appelé "infini" l'autre est le "point central d'ordre 2".

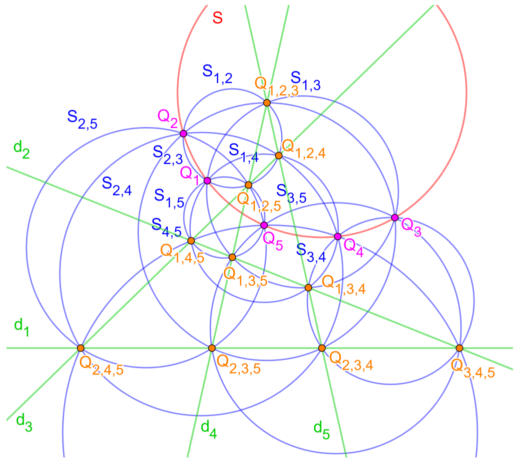
Les cas de 3 et 4 droites ont été démontrés dans l'article précédent. Pour illustrer la démonstration de la récurrence nous allons démontrer le cas de 5 droites avec de nouvelles notations. De plus, elle soulèvera un problème de taille !

8. Niveau "Lycéen fan de maths"
9. Il faut voir ceci comme dans le cas $n = 5$: on a utilisé les points de Miquel du cas $n = 4$.

Démonstration. Pour 5 droites :

- ✎ On note Q_i le point de Miquel déterminé par toutes les droites sauf la droite d_i.
  Exemple : On note Q_1 le point de Miquel déterminé par les quatre droites d_2, d_3, d_4, d_5. Il y a cinq points de Miquel.
- ✎ On note $S_{i,j}$ le cercle circonscrit déterminé par toutes les droites sauf d_i et d_j.
  Exemple : On note $S_{1,2}$ le cercle circonscrit déterminé par les trois droites d_3, d_4 et d_5. Il y a dix cercles.
- ✎ On note $Q_{i,j,k}$ l'intersection de deux droites déterminée par toutes les droites sauf d_i, d_j et d_k.
  Exemple : On note $Q_{1,2,3}$ l'intersection des droites d_4 et d_5. Il y en a dix.

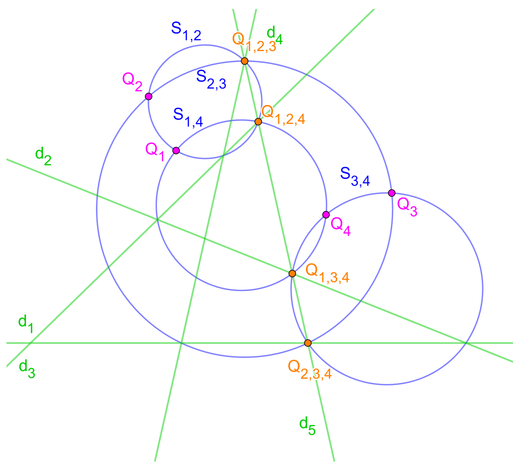




On veux montrer que 5 droites déterminent un cercle-droite, autrement dit cela revient à montrer que Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 sont cocycliques ou alignés.

En jouant sur le rôle symétrique des points, il suffit de montrer que quatre d'entre eux sont cocycliques ou alignés. Comme sur chaque cocyclicité il y a trois points en communs, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 et Q_5 seront cocycliques.

Montrons donc la cocyclicité ou l'alignement des points Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 :



- → $S_{1,4}$ et $S_{1,2}$ s'intersectent en Q_1 et $Q_{1,2,4}$
- → $S_{1,2}$ et $S_{2,3}$ s'intersectent en Q_2 et $Q_{1,2,3}$.
- → $S_{2,3}$ et $S_{3,4}$ s'intersectent en Q_3 et $Q_{2,3,4}$.
- → $S_{3,4}$ et $S_{1,4}$ s'intersectent en Q_4 et $Q_{1,3,4}$.

$Q_{1,2,4}$, $Q_{1,2,3}$, $Q_{2,3,4}$ et $Q_{1,3,4}$ appartiennent à d_5 et d'après le **théorème des Six Cercles**, vu et démontré précédemment, Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 sont cocycliques ou alignés.

On a donc bien montré que les 5 points de Miquel Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 et Q_5 sont cocycliques ou alignés. □

Si l'on continue à ajouter des droites, un problème de taille va apparaître. Comme constaté dans le cas de cinq droites, les cinq points de Miquel peuvent être alignés. Cela veut dire qu'il est possible d'avoir des intersections de droites, et non de cercles, à un certain rang de la récurrence. Il est bien connu que dans un plan complexe ou réel, des droites en position générale s'intersectent en un point, et non en deux. Il manquera ainsi une intersection, entraînant l'impossibilité de continuer cette jolie récurrence dans ces plans. L'objectif par la suite sera ainsi de "compléter" le plan de sorte que la notion de cercle et de droite se confondent !

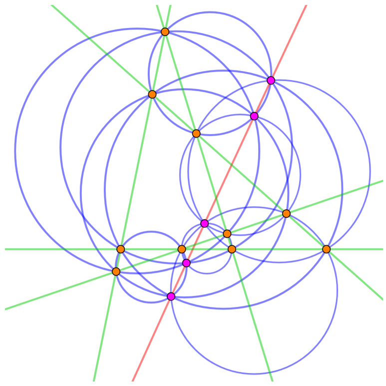


FIGURE 11 – Image illustrant un cas où les 5 points de Miquel sont alignés.

"Cercle" et "droite", deux mots pour une même notion ?

Jusqu'à présent, ces termes ont été définis dans le cadre de la géométrie euclidienne pour deux objets bien distincts. Toutefois, comme on a pu le voir dans l'article, il existe des situations où les droites et les cercles semblent se confondre. Par exemple, on peut citer le birapport qui est réel si et seulement si les quatre points sont cocycliques ou alignés. L'explication de ce phénomène réside dans une nouvelle géométrie dite "inversive". C'est grâce à elle que l'on va pouvoir donner un sens à une expression que l'on entend souvent : "une droite est un cercle passant par l'infini". Découvrons ensemble les grandes lignes de cette notion :

Pour le moment, plaçons nous dans $\mathcal{E}$, un espace affine euclidien. Vous connaissez sûrement les translations, les rotations ou encore les homothéties. Si on vous dit que ces trois transformations du plan transforment des cercles en des cercles vous ne serez pas surpris. Mais connaissez vous les inversions ? Ce sont aussi des transformation du plan mais cette fois-ci privé d'un point Ω. En voici une définition :

Définition (Inversion par rapport à un cercle). Étant donné un point A, et un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $r \neq 0$, il existe un point A' sur la droite (ΩA) tel que $\overline{\Omega A} \times \overline{\Omega A'} = r^2$.[10] Le point A' est l'inverse du point A par rapport au cercle $\mathcal{C}$.

On pourra également noter que l'inversion est une involution, c'est à dire une application bijective du plan privé de Ω, qui est sa propre réciproque.

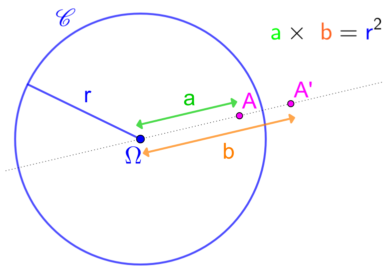


FIGURE 12 – Image illustrant la définition d'inversion dans le plan par rapport à un cercle.

9. Une transformation géométrique est une bijection d'une partie d'un ensemble géométrique dans lui-même.
10. On note par $\overline{\Omega A}$ la mesure algébrique de ΩA.

Mais que se passe-t-il pour des points de plus en plus proches de Ω. Et bien les images vont vers l'infini ! Inverser des points c'est bien, mais essayons avec un autre objet, au hasard : un cercle ! Il suffit d'inverser tous ses points afin d'obtenir l'inversion de ce dernier ! Et il se trouve que son inversion peut être soit une droite, soit un cercle :

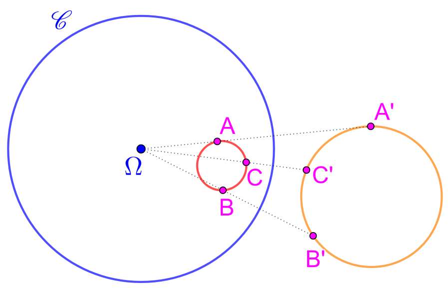


Figure 13 – Inversion d'un cercle qui ne passe pas par Ω.

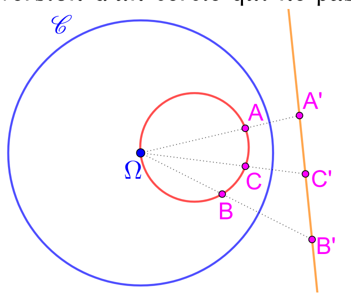


Figure 14 – Inversion d'un cercle qui passe par Ω.

Dans la Figure 14, la droite en orange est l'inverse du cercle rouge par rapport à $\mathcal{C}$. La raison pour laquelle ce n'est pas un cercle traditionnel est que le cercle rouge passe par Ω. En effet, par définition, l'image du point Ω par inversion est infiniment loin. Ainsi, l'inversion d'un cercle passant par Ω correspond à un autre cercle passant par l'inversion du point Ω qui est l'infini.
Ainsi, il faut retenir que, sous inversion, les cercles sont envoyés sur des cercles (si nous acceptons que les lignes droites ne sont que des cercles passants par l'infini).

Tout cela semble bien abstrait, mais lorsque l'on rajoute une dimension, tout devient plus logique ! Dans l'espace, la définition d'inversion reste la même, sauf que le cercle devient une sphère :

Définition (Inversion par rapport à une sphère). Étant donné un point A, et une sphère $\mathcal{S}$ de centre Ω et de rayon r, il existe un point A' sur la droite (ΩA) tel que $\overline{\Omega A} \times \overline{\Omega A'} = r^2$. Le point A' est l'inverse du point A par rapport à la sphère $\mathcal{S}$.

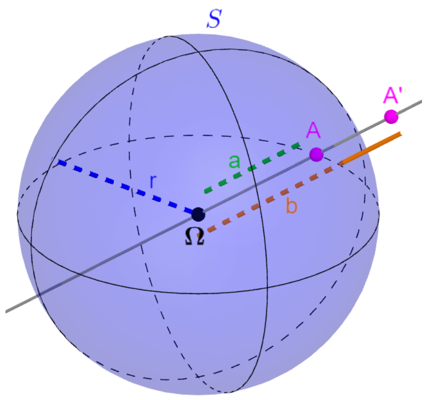


Figure 15 – Image illustrant la définition d'inversion dans l'espace par rapport à une sphère.

En deux dimensions, nous avons vu que les cercles sont envoyés sur des cercles ou des droites (qui sont des cercles passant par l'infini), et l'analogue en dimension trois est que les sphères sont envoyées sur des sphères ou sur des plans (qui sont des sphères traversant l'infini).

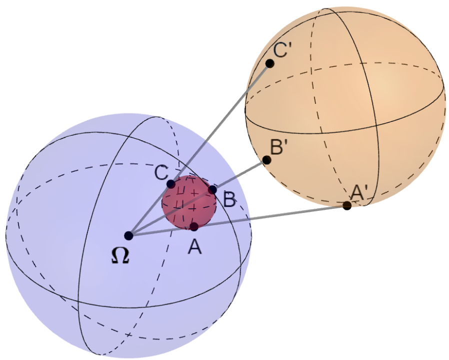


FIGURE 16 – Inversion d'une sphère qui ne passe pas par Ω.

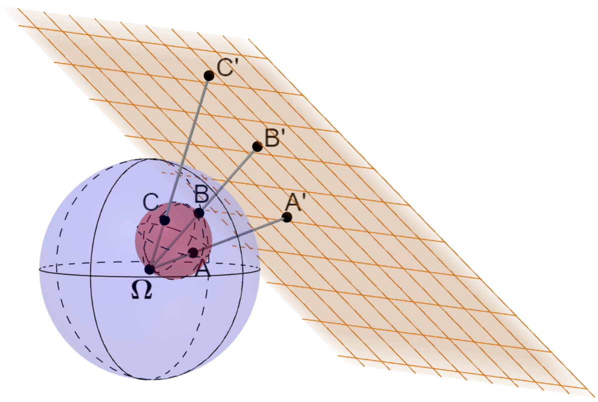


FIGURE 17 – Inversion d'une sphère qui passe par Ω.

De la même manière, comme la sphère rouge passe par Ω, par définition, la sphère orange aura ainsi un point à l'infini et sera donc un plan.

Abordons maintenant une situation bien particulière. Dans l'espace, prenons le plan complexe représenté par le plan d'équation $z = 0$, et une sphère centrée en l'origine et de rayon 1, appelée sphère de Riemann. Il se trouve que le plan d'équation $z = 0$ est l'inversion de la sphère de Riemann par rapport à la sphère de centre $\Omega(0, 0, 1)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$. Comme une inversion est involutive, nous pouvons construire "une correspondance" en faisant correspondre, à chaque point du plan complexe, un point de la sphère de Riemann, privé du point Ω, de tel sorte qu'ils aient la même affixe. Cette projection s'appelle la **projection stéréographique** de la sphère de Riemann.

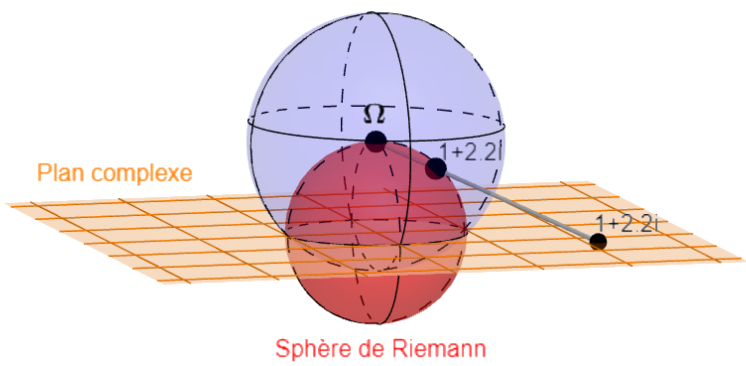


FIGURE 18 – Projection stéréographique de la sphère de Riemann

Ainsi via projection stéréographique, nous pouvons identifier la sphère de Riemann avec $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, le point

Ω se projetant à l'infini. Les cercles de $\mathbb{C}$ sont les projetés de cercles sur la sphère ne passant pas par Ω et les droites les projetées des cercles passant par Ω.

On notera $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ cet espace appelé "droite projective prototype".

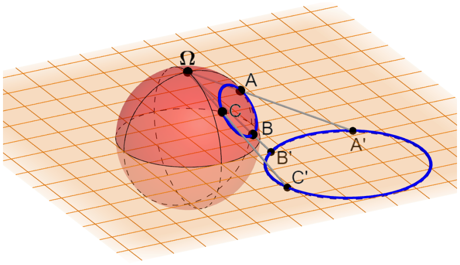


Figure 19 – Projection d'un cercle sur un cercle.

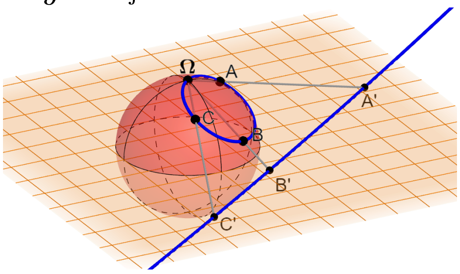


Figure 20 – Projection d'une droite sur un cercle.

Pour conclure, en se plaçant dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, les droites de $\mathbb{C}$ deviennent des cercles, et ainsi notre problème est résolu !

Remarque. Dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, le théorème des six cercles peut ainsi se généraliser au cas où $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ sont des cercles ou des droites.

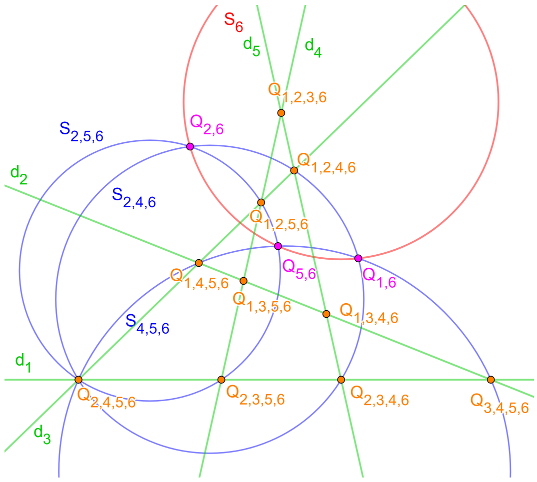
Maintenant que le problème est levé, plaçons nous dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ pour démontrer le théorème du point de Clifford, puis la récurrence.

Théorème (Point de Clifford). *Pour 6 droites en position générale, les 6 cercles (ou droites) de Miquel associés aux 6 quintuplets de droites sont concourants en un point.*

En voici la preuve qui repose sur le théorème des six cercles.

Démonstration. Pour 6 droites :

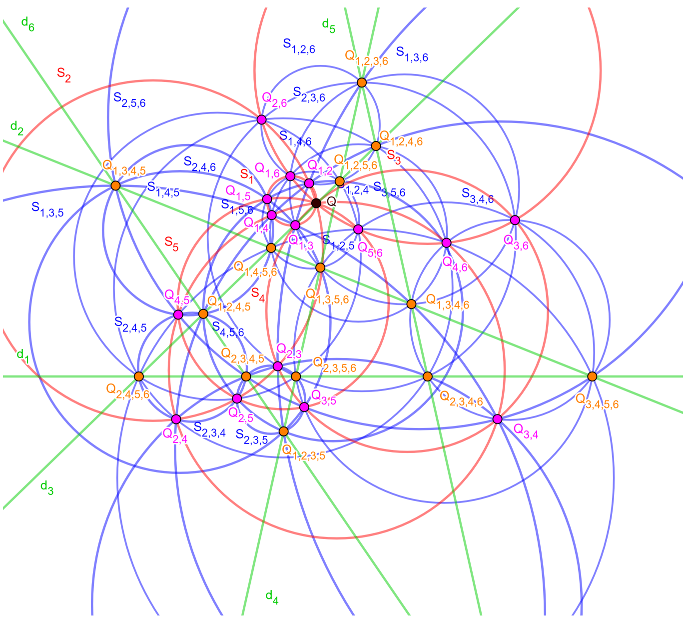
- ✎ On note S_i le cercle de Miquel déterminé par toutes les droites sauf d_i.
  Exemple : On note S_1 le cercle de Miquel déterminé par les droites d_2, d_3, d_4, d_5, d_6.
- ✎ On note $S_{i,j,k}$ le cercle circonscrit déterminé par toutes les droites sauf d_i, d_j et d_k .
  Exemple : On note $S_{1,2,3}$ le cercle circonscrit au triangle formé par les droites d_4, d_5, d_6.
- ✎ On note $Q_{i,j}$ le point de Miquel déterminé par toutes les droites sauf d_i et d_j.
  Exemple : On note $Q_{1,2}$ le point de Miquel déterminé par les droites d_3, d_4, d_5, d_6.
- ✎ On note $Q_{i,j,k,\ell}$ le point d'intersection des deux droites différentes de d_i, d_j et d_k.
  Exemple : On note $Q_{1,2,3,4}$ le point d'intersection des droites d_5 et d_6.



On veut montrer que 6 droites déterminent un point, autrement dit cela revient à montrer que $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ ont un point Q en commun.

En jouant sur le rôle symétrique des cercles, il suffit de montrer que trois d'entre eux sont concourant. Comme dans chaque triplet d'intersection, il y a deux cercles en commun, les cercles centraux $S_1, \ldots, S_6$ s'intersectent tous en un point Q.

Montrons donc que Q **appartient aux cercles** S_1, S_2 **et** S_3 **:**
On suppose que le point Q est l'un des point d'intersection des cercles S_1 et S_2, différent des points de Miquel.

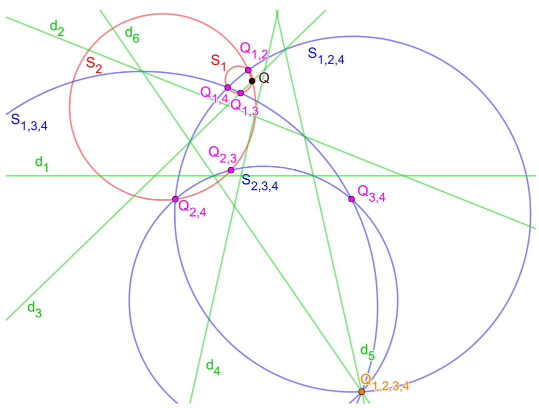


→ S_1 et S_2 se coupent en $Q_{1,2}$ et Q ;

→ S_1 et $S_{1,3,4}$ se coupent en $Q_{1,4}$ et $Q_{1,3}$;

→ $S_{1,3,4}$ et $S_{2,3,4}$ se coupent en $Q_{1,2,3,4}$ et $Q_{3,4}$;

→ S_2 et $S_{2,3,4}$ se coupent en $Q_{2,4}$ et $Q_{2,3}$.



Comme $Q_{1,4}$, $Q_{1,2,3,4}$, $Q_{2,4}$ et $Q_{1,2}$ appartiennent au cercle $S_{1,2,4}$, d'après le théorème des Six Cercles, $Q_{1,3}$, $Q_{3,4}$, $Q_{2,3}$ et Q sont cocycliques. Donc Q est sur S_3.

On a donc bien montré que 6 droites déterminent un point central de rang 6 que l'on nomme Point de Clifford.

□

Revenons à notre récurrence :

Théorème (Récurrence de Clifford). *Tout système de n ($n \geq 3$) droites en position générale dans le plan détermine :*

- *Un cercle central, si n est impair, qui passe par les n points centraux d'ordre $n-1$.*
- *Un point central, si n est pair, qui est l'intersection des n cercles centraux d'ordre $n-1$.*

Pour démontrer ce beau théorème, nous allons utiliser un raisonnement simple à comprendre et bien connu des lycéens : **la démonstration par récurrence.** D'où le nom du théorème "récurrence de Clifford".
Il faut montrer que ce théorème est vrai pour un nombre quelconque de droite en position générale. Commençons doucement par vérifier les premiers cas :

→ A-t-on besoin de rappeler le cas de trois droites tellement celui-ci est connu ? Le **théorème du cercle circonscrit** est bien évidement un cas particulier de cette récurrence !

→ Le cas de quatre droites correspond au **théorème du point de Miquel** démontré dans le premier article.

→ Le cas de cinq droite correspond au **théorème du cercle-droite de Miquel** démontré au début de cet article.

→ Le cas de six droites a été démontré précédemment !

Nous venons d'initialiser cette récurrence jusqu'à six droites.

Supposons maintenant que le nombre de droites n est supérieur six, ainsi que le théorème vrai pour $n-1$, $n-2$, $n-3$ et $n-4$ droites[11] et montrons le pour n droites.

➥ Dans un premier temps, montrons qu'un nombre impair de droites détermine un cercle central.

Pour cela, la mise en place de notations bien particulières est nécessaire :

Remarque. Afin de mieux comprendre ce qui suit, la preuve pour $n = 5$, avec les mêmes notations que cette démonstration, a été traitée dans l'article 1.

Pour n droites :

✎ On note Q_i *(resp.* $Q_{i,j,k}$*)* le point central déterminé par toutes les droites sauf d_i. *(resp.* d_i, d_j *et* d_k*).*

✎ On note $S_{i,j}$ *(resp.* $S_{i,j,k,\ell}$ *)* le cercle central déterminé par toutes les droites sauf d_i et d_j. *(resp.* d_i, d_j, d_k *et* d_ℓ*).*

On remarquera que :

Pour i fixé et $j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$, Q_i est l'intersection des cercles centraux des $n-1$ systèmes possibles de $n-2$ droites (toutes sauf d_i et d_j). Les $n-1$ systèmes possibles correspondent aux cercles centraux $(S_{i,j})_{\substack{1\leq j\leq n \\ i\neq j}}$. Donc :

$$\text{Pour } i \text{ fixé et } j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i : Q_i \text{ appartient à } S_{i,j}. \tag{2}$$

De même :

$$\text{Pour } i, j, k \text{ fixés et } \ell \in \{1, \dots, n\}, \ell \neq i, j, k : Q_{i,j,k} \text{ appartient à } S_{i,j,k,\ell}. \tag{3}$$

Pour i, j fixés et $k \in \{1, \dots, n\}, k \neq i$, $S_{i,j}$ passe par les points centraux des $n-2$ systèmes possibles de $n-3$ droites : toutes sauf d_i, d_j et d_k. Les $n-2$ systèmes possibles correspondent aux points centraux $(Q_{i,j,k})_{1\leq k\neq\{i,j\}\leq n}$. Donc :

$$\text{Pour } i, j \text{ fixés et } k \in \{1, \dots, n\}, k \neq i, j : Q_{i,j,k} \text{ appartient à } S_{i,j}. \tag{4}$$

11. On pourra remarquer ici que nous n'avons pas seulement besoin d'un seul rang vérifié, mais bien de 4 rangs. C'est une récurrence "forte".

On veux montrer qu'un nombre impair n de droites détermine un cercle central, autrement dit cela revient à montrer que $Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1}, Q_n$ sont cocycliques.

En jouant sur le rôle symétrique des points, il suffit de montrer que quatre d'entre eux sont cocycliques. Comme sur chaque cocyclicité il y a trois points en commun $Q_1, ..., Q_n$ seront coycliques.

Montrons donc la cocyclicité de Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 :

→ D'après (2), Q_1 appartient à $S_{1,4}$ et $S_{1,2}$. D'après (4), $Q_{1,2,4}$ appartient à $S_{1,4}$ et $S_{1,2}$. Donc Q_1 et $Q_{1,2,4}$ sont les intersections de $S_{1,4}$ et $S_{1,2}$.

De même :

→ $S_{1,2}$ et $S_{2,3}$ s'intersectent en Q_2 et $Q_{1,2,3}$.

→ $S_{2,3}$ et $S_{3,4}$ s'intersectent en Q_3 et $Q_{2,3,4}$.

→ $S_{3,4}$ et $S_{1,4}$ s'intersectent en Q_4 et $Q_{1,3,4}$.

D'après (3), $Q_{1,2,4}$, $Q_{1,2,3}$, $Q_{2,3,4}$ et $Q_{1,3,4}$ appartiennent au cercle $S_{1,2,3,4}$ et d'après le **théorème des Six Cercles**, vu et démontré précédemment, Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 sont cocycliques.

On a donc bien montré qu'un nombre impair de droites détermine un cercle central.

➥ Montrons maintenant qu'un nombre pair de droite détermine un point central.

On reprend la même notation que pour le cas impair à un décalage près :

Remarque. Afin de mieux comprendre ce qui suit, la preuve pour $n = 6$, avec les mêmes notations que cette démonstration, a été traitée dans l'article.

Pour n droites :

✎ On note S_i (resp. $S_{i,j,k}$) le cercle central déterminé par toutes les droites sauf d_i. (resp. d_i, d_j et (d_k)).

✎ On note $Q_{i,j}$ (resp. $Q_{i,j,k,\ell}$) le point central déterminé par toutes les droites sauf d_i et d_j (resp. d_i, d_j, d_k et d_ℓ).

Par le même procédé que dans le cas impair :

$$\text{Pour } i,j \text{ fixés et } k \in \{1,\dots,n\}, k \neq i,j,\ Q_{i,j} \text{ appartient à } S_{i,j,k}. \tag{5}$$

$$\text{Pour } i \text{ fixé et } j \in \{1,\dots,n\}, j \neq i,\ Q_{i,j} \text{ appartient à } S_i. \tag{6}$$

$$\text{Pour i,j,k fixé et } \ell \in \{1,\dots,n\}, \ell \neq i,j,k,\ Q_{i,j,k,\ell} \text{ appartient à } S_{i,j,k}. \tag{7}$$

On veut montrer qu'un nombre pair de droite détermine un point central, autrement dit cela revient à montrer que $S_1, S_2, ..., S_{n-1}, S_n$ ont un point Q en commun.

En jouant sur le rôle symétrique des points, il suffit de montrer que trois d'entre eux sont concourant. Comme dans chaque triplet d'intersection, il y a deux cercles en commun, les cercles centraux $S_1, ..., S_n$ s'intersectent tous en un point Q.

Montrons donc que Q appartient aux cercles S_1, S_2 et S_3 :

Par (5) et (6) il découle que :

→ S_1 et S_2 se coupent en $Q_{1,2}$ et Q ;

→ S_1 et $S_{1,3,4}$ se coupent en $Q_{1,4}$ et $Q_{1,3}$;

→ $S_{1,3,4}$ et $S_{2,3,4}$ se coupent en $Q_{1,2,3,4}$ et $Q_{3,4}$;

→ S_2 et $S_{2,3,4}$ se coupent en $Q_{2,4}$ et $Q_{2,3}$.

Comme, d'après (5) et (7) , $Q_{1,4}$, $Q_{1,2,3,4}$, $Q_{2,4}$ et $Q_{1,2}$ appartiennent au cercle $S_{1,2,4}$, d'après le théorème des Six Cercles, $Q_{1,3}$, $Q_{3,4}$, $Q_{2,3}$ et Q sont cocycliques. Donc Q est sur S_3.

On a donc bien montré qu'un nombre pair de droite déterminent un point central.

L'énoncé est vrai jusqu'à quatre droites et est héréditaire pour les entiers pairs et impairs, donc la récurrence est vraie pour un nombre de droites supérieur ou égal à trois. □

Et voila, la démonstration de ce superbe théorème est terminée.

Vous êtes toujours là ? Félicitation, vous connaissez désormais un des nombreux et majestueux résultats méconnu sur la géométrie des cercles et des droites !
Si vous n'avez pas eu votre dose de cercles et de droites vous pourrez toujours jeter un coup d'oeil à **la démonstration de ce magnifique théorème qui se trouve en annexe**. Mais si vous n'en avez pas eu assez après cela nous en sommes navrés !

Références

[1] Boyer Pascal. *Algèbre et géométries*. Calvage & Mounet, 2015.

[2] Ladegaillerie Yves. *Géométrie Affine, Projective, Euclidienne et Anallagmatique*. ellipses, 2003.

[3] Sortais Yvonne et René. *La Géométrie du triangle exercices résolus*. Hermann, 1997.