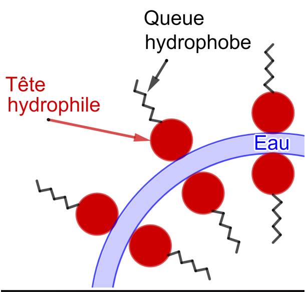
Auteurs :
Feurtet Clara
&
Chanceaux Benoit

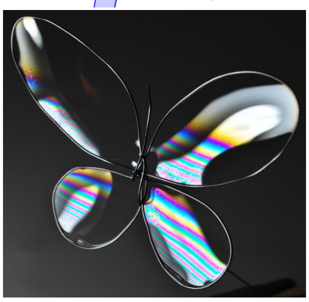
Date :
05/05/2022

Bulles et films de savons

Le savon est utilisé au quotidien pour ses propriétés nettoyantes, mais aussi pour amuser les petits et les grands qui s'émerveillent devant la beauté de bulles rondes plus ou moins grosses et nombreuses. Dans cet article, nous vous proposons de retourner en enfance en observant et analysant des bulles et des films de savon. Bon voyage !

Mais de quoi et comment sont composés les films et les bulles de savon ?





Un film d'eau savonneuse est une fine couche constituée d'une paroi d'eau, entourée par des **molécules amphiphiles** (molécules portant à la fois un **groupement hydrophile** pouvant se lier à l'eau, et un **groupement hydrophobe** qui repousse l'eau). A cause du groupement hydrophobe, les molécules amphiphiles vont chercher à minimiser la surface de la paroi d'eau afin d'avoir le moins de contact possible avec elles. **Des contraintes peuvent être imposées au film d'eau savonneuse**. Par exemple, **s'accrocher à un contour** est une contrainte. Le papillon ci-contre l'illustre bien. Ainsi, le film d'eau savonneuse formera une surface minimale tout en s'accrochant au contour.
Pour la bulle de savon, la contrainte est le **volume d'air** se trouvant à l'intérieur du film. En effet, les groupements hydrophobes qui sont à l'intérieur de la bulle de savon vont exercer une pression sur l'eau afin d'avoir le plus d'espace possible. La bulle n'éclatera pas, car ceux qui sont à l'extérieur de la paroi d'eau agissent également en retour. Il faut ainsi que la surface de la bulle soit la plus réduite, mais aussi que son volume soit maximal. **La bulle a une forme géométrique qui englobe le plus grand volume pour une surface donnée.**

Mais quel est le rapport entre l'eau savonneuse et les mathématiques ?

On peut visualiser des solutions de problèmes géométriques comme la maximisation de volume pour une surface donnée, le problème de Steiner ou encore le problème de Plateau grâce à l'eau savonneuse. Mais chaque chose en son temps, commençons par le commencement ! Intéressons nous tout d'abord à un problème connu dès l'Antiquité :

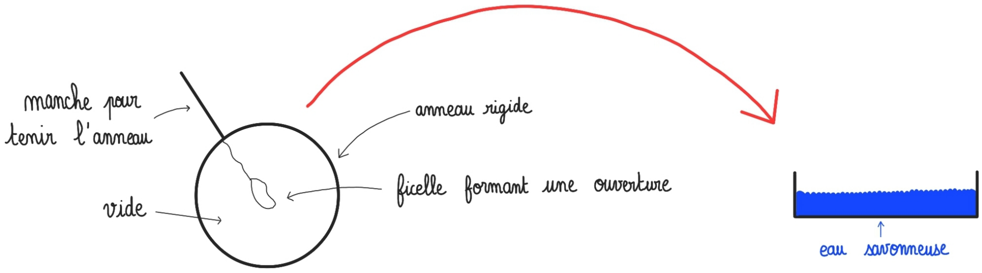
Pour un périmètre donné, quelle forme géométrique du plan possède la plus grande aire ?

La princesse Didon aurait trouvé la solution lorsqu'elle a créé la ville de Carthage en 814 avant J.-C., en maximisant l'aire de son territoire délimité par une corde de 4 km de long (corde obtenue avec la peau d'un bœuf coupée en fines lanières). Pourtant, il a fallu attendre le XIX^e siècle et **Karl Weierstrass** pour trouver la première démonstration de ce résultat. Mais quelle est cette fameuse forme ?

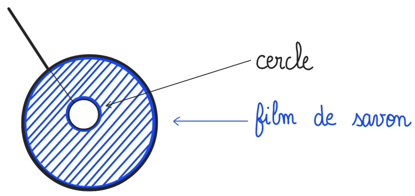
Pour répondre à cette question, nous vous proposons une petite expérience nous permettant d'émettre une hypothèse.

●○●○ Expérience ●○●○

Construire et tremper dans un récipient d'eau savonneuse [1] la forme géométrique ci-contre.



Percer le film créé à l'intérieur de la ficelle à l'aide de vos doigts. Voici le résultat.



On observe que la corde prend la forme d'un cercle. Comme le savon cherche à minimiser sa surface, l'aire à l'intérieur de la corde est maximale. On peut donc supposer que pour une longueur donnée, la forme géométrique qui renferme une aire maximale est le cercle.

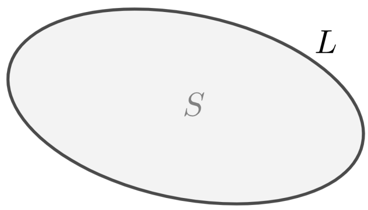
Lien vers l'expérience en vidéo : Eau savonneuse et inégalité isopérimétrique !

Jakob Steiner (1796 – 1863) était un mathématicien suisse. Ses travaux concernent essentiellement la géométrie. Il s'est fait connaître du monde scientifique en publiant des articles dans le Journal de Crelle, les plus importants concernent les courbes et les surfaces algébriques.

Inégalité isopérimétrique dans le plan

Dans le plan, une figure géométrique d'aire S et de périmètre L vérifie l'inégalité

$$S \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

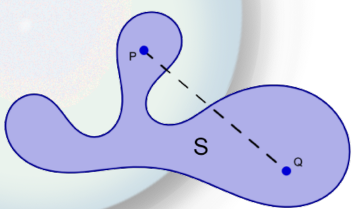


De plus, on a l'égalité si et seulement si la courbe L est un cercle.

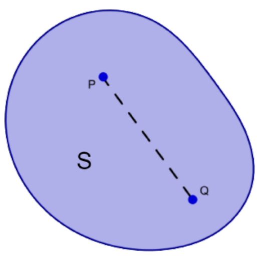
En 1836, **Jacob Steiner** a donné une "pseudo-preuve" très abordable de l'inégalité isopérimétrique par condition nécessaire. Il part du principe qu'il existe une courbe, parmi toutes les courbes fermées à périmètre donné, contenant la plus grande aire. Puis il énonce trois conditions :

Condition 1 :

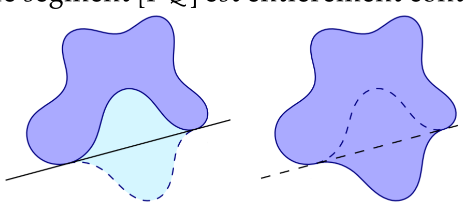
La courbe doit être convexe. On rappelle qu'une courbe fermée délimitant une surface S est convexe si et seulement si pour tous points P et Q distinct appartenant à cette surface, le segment $[PQ]$ est entièrement contenu dans celle-ci.



Courbe non convexe



Courbe convexe

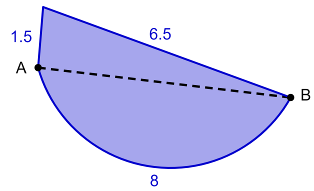


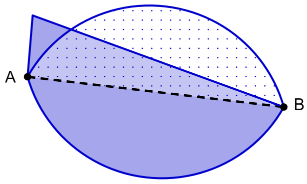
Si elle ne l'est pas, par symétrie, on peut toujours trouver une courbe de même périmètre mais d'aire plus grande, donc la courbe est forcément convexe.

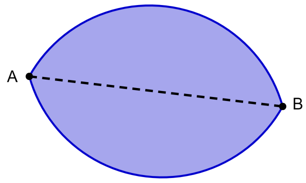
1. Pour préparer de l'eau savonneuse, il faut : 16 doses d'eau, 1 dose de sucre en poudre, 4 doses de liquide vaisselle. Remuer doucement la préparation obtenue.

Condition 2 :

Choisissons deux points, A et B, sur une courbe convexe de telle sorte que le segment $[AB]$ divise la courbe en deux parties de longueurs égales. Jacob Steiner nous dit que **les surfaces de part et d'autre de ce segment doivent avoir la même aire**.



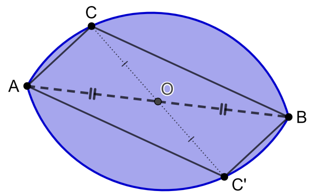


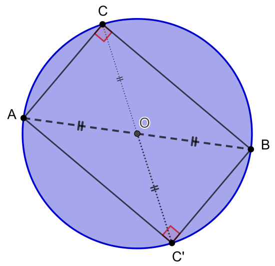


En effet, en symétrisant la partie qui a la plus grande surface, par rapport au segment $[AB]$, on obtient une nouvelle forme qui a le même périmètre que la forme de départ, mais avec une aire plus grande.

Condition 3 :

Reprenons A et B comme précédemment, et plaçons un point C quelconque sur la courbe. Construisons C' le symétrique de C par rapport au milieu O de $[AB]$. La troisième condition nécessaire est que **le triangle** ABC **doit être rectangle en** C **pour maximiser l'aire de la figure**.





En effet, l'aire du parallélogramme $ACBC'$ est maximale quand celui-ci est un rectangle. Or si un triangle est rectangle, la longueur de la médiane issue de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse. Donc pour tout point C appartenant à la courbe, on a $AO = BO = CO = C'O$, donc la courbe est un cercle.

Fin de la démonstration nous dit Jacob Steiner. Mais de même que pour un détective, il ne suffit pas d'éliminer les suspects au fur et à mesure pour en arriver à un coupable. Encore faut-il s'assurer qu'il y a bien un coupable. Ici aussi, il faut s'assurer qu'il y a bien une solution, ce qui n'est pas abordé dans cette preuve, elle est donc incomplète mais néanmoins très intéressante. La preuve de l'existence d'une telle forme peut se faire à l'aide de l'analyse de Fourier.

Maintenant que l'on sait que pour un périmètre donné, le cercle est la forme géométrique du plan qui renferme la plus grosse aire, on peut se poser la question suivante :

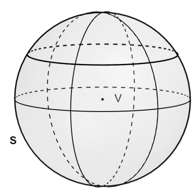
Dans l'espace, pour une surface donnée, quelle forme géométrique renferme le plus gros volume ?

On a vu que par ses propriétés physiques, la bulle de savon cherche à envelopper un volume d'air donné dans la surface la plus petite possible. Sa forme donne la solution du problème isopérimétrique en dimension 3 : la **sphère**. Toute autre surface de même aire que la sphère délimite un volume plus petit que celle-ci. Cette observation est cohérente avec l'énoncé suivant :

✎ **Inégalité isopérimétrique dans l'espace**

Dans l'espace, un volume V de surface S vérifie toujours :

$$V^2 \leq \frac{S^3}{36\pi}.$$



De plus, on a l'égalité si et seulement si la surface est une sphère.

Il est facile d'expérimenter ce résultat avec un tube à bulles de savon. En trempant une forme dans l'eau savonneuse, un film de savon apparaît et il suffit de souffler sur celui-ci pour obtenir une bulle sphérique.

Comment déterniner le plus court chemin

Après avoir analysé le cercle et la sphère, par leurs caractéristiques surprenantes et leurs liens avec l'eau savonneuse, faisons de même en nous intéressant maintenant à un autre problème d'optimisation.

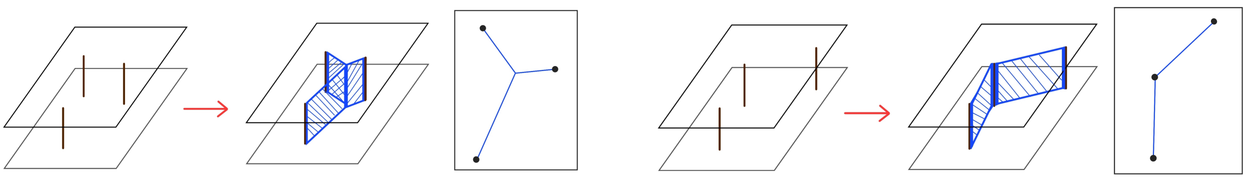
Au cours du XVIIᵉ siècle, le mathématicien français **Pierre de Fermat** se questionna sur la manière de relier les trois sommets d'un triangle de façon à ce que le réseau ainsi formé soit de longueur minimale. Il conjectura la nécessité d'un quatrième point (que l'on nommera F) pour relier les sommets du triangle à celui-ci. Si cette conjecture est vérifiée, il restera le problème de trouver l'emplacement de ce point F pour que la longueur du réseau formé soit minimale. Problème qui fut résolu plus tard par **Evangelista Torricelli**. Essayons de trouver par nous-même ce fameux point F :

Etant donné 3 points du plan, quel est le réseau de longueur minimale les reliant tous ?

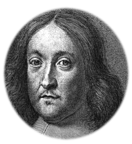
Pour répondre à cette question, nous vous proposons une deuxième petite expérience.

●○●○ Expérience ●○●○

On considère deux dispositifs de deux plaques parallèles en plexiglas, reliées par trois bâtonnets perpendiculairement. L'un où les trois bâtonnets forment un triangle avec des angles inférieurs à 120°, l'autre avec un angle supérieur à 120°. On trempe ces deux dispositifs dans de l'eau savonneuse, on les sort délicatement et on regarde ce qu'il se passe.



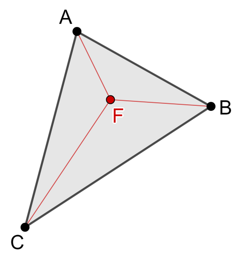
Un film de savon s'est formé, reliant les trois bâtonnets. Celui-ci est composé de trois rectangles perpendiculaires à la surface des plaques. Vu du dessus, il forme trois segments. Comme le film de savon minimise son aire, il minimise également la longueur des segments.
On peut donc supposer que pour trois points formant un triangle avec des angles inférieurs à 120°, le réseau minimal les reliant nécessite un carrefour à l'intérieur du triangle. Pour trois points formant un triangle avec un angle supérieur à 120°, le réseau minimal passe par les deux côtés qui forment cet angle.
Lien vers l'expérience en vidéo : Eau savonneuse et problème de Steiner !



Pierre de Fermat (1607 – 1665) était un mathématicien français souvent nommé "le prince des amateurs". Il est particulièrement connu dans le domaine de la physique avec le principe de Fermat, mais aussi en mathématiques en énonçant le dernier théorème de Fermat.

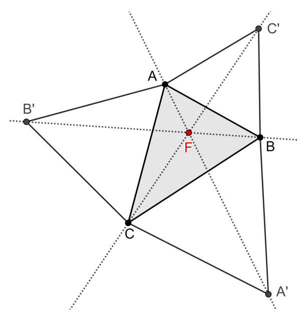
✎ Théorème : Point de Fermat

Soit ABC un triangle dont les angles sont inférieurs à 120°.
Il existe un unique point F, dont la somme $FA+FB+FC$ des distances de F aux trois sommets est minimale. Ce point est appelé **point de Fermat**.



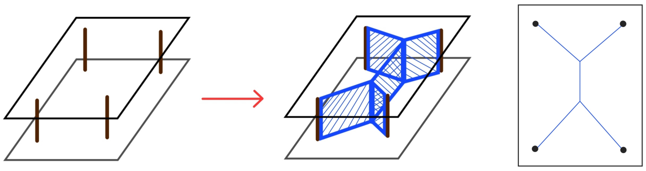
Si un des angles du triangle ABC est supérieur ou égal à 120°, le point F minimisant la somme $FA+FB+FC$ est le sommet de cet angle.

Pour déterminer le point de Fermat d'un triangle ABC il faut tout d'abord construire trois triangles équilatéraux ABC', $AB'C$ et $A'BC$ extérieurs au triangle ABC. Le point de Fermat est le point de concours des droites (AA'), (BB') et (CC').



Le problème de Steiner est la généralisation de cette question pour un nombre arbitraire de points. Ce problème a trouvé de multiples applications dans un panel de disciplines très étendu. Comme son nom l'indique, **Jacob Steiner** contribua aux recherches.

L'expérience pour déterminer la solution à ce problème, pour n points du plan, est identique à celle qui détermine le point de Fermat. Il suffit de construire le même dispositif de deux plaques parallèles mais reliées non pas par 3 mais par n bâtonnets perpendiculairement. Une fois ce dispositif plongé dans de l'eau savonneuse, il en ressort un film de savon reliant les n bâtonnets qui est une solution à ce problème. Voici un exemple pour 4 points du plan représentants les sommets d'un rectangle.



En général, si on prend 10, 20 ou même 100 000 points, la solution au problème de Steiner comprendra :

1. Un réseau constitué de segments,
2. Des carrefours créés à partir de 3 segments formant 3 angles de 120 degrés,
3. Au maximum, ces carrefours seront du nombre de $n-2$ pour n points considérés au départ.

Compliquons nous la tâche et intéressons nous maintenant à un problème plus général !

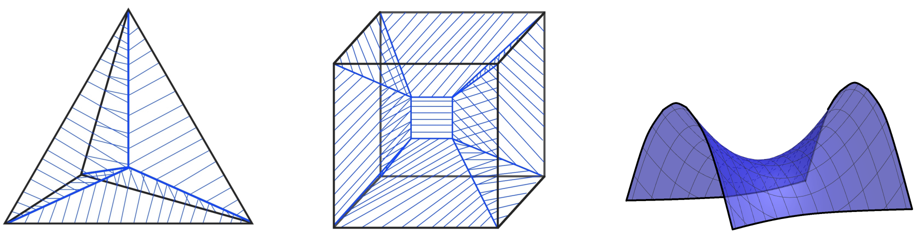
Et si on plongeait n'importe quelles formes dans du savon ?

Voici une bonne question et pas des moindres ! Elle remonte à l'année 1760 où **Joseph-Louis Lagrange** énonça le problème suivant :

Pour un bord donné, existe t-il une surface d'aire minimale s'appuyant sur celui-ci ?

Regardons les surfaces créées par le savon pour trois figures de bords différents.

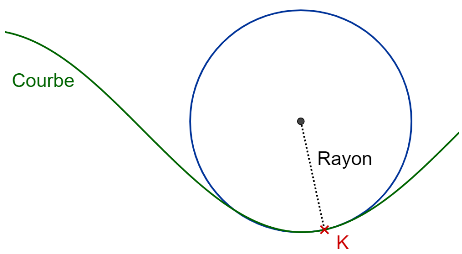
Expérience



Sachant que le film d'eau savonneuse a pour contrainte de s'accrocher aux bords de la figure et qu'il cherche à minimiser sa surface, il représente la surface minimale s'appuyant sur les bords.
Lien vers les expériences en vidéo : Eau savonneuse et problème de Plateau !

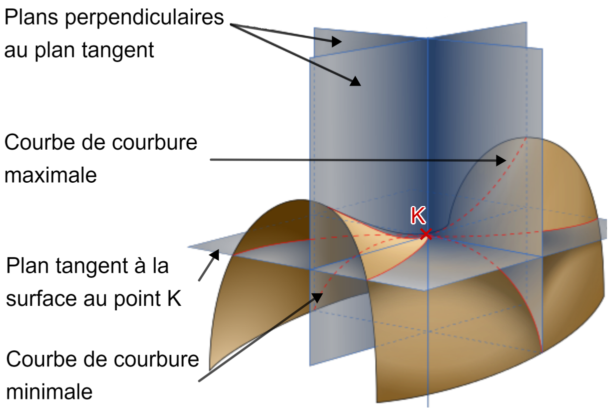
A première vue, il est difficile de tirer des conclusions communes des expériences avec les trois formes trempées dans l'eau savonneuse. Pourtant, il y en a ! Mais avant de les citer il nous faut comprendre un outil mathématique puissant : **la courbure**.

Dans le plan, **la courbure d'une courbe en un point** K est l'inverse du rayon du cercle qui approche le mieux la courbe en K (au signe près selon l'orientation du plan et le paramétrage. On ne le traitera pas ici). Plus la courbure est petite, plus l'allure de la courbe se rapprochera de celle d'une droite.



$$\text{Courbure} = \pm\frac{1}{\text{Rayon}}$$

Dans l'espace, définissons maintenant la **courbure moyenne** en un point d'une surface.



Prenons un point K de notre surface et son plan tangent (plan qui approche le mieux cette surface au voisinage de K). Intéressons nous à tous les plans perpendiculaires à ce plan tangent. L'intersection entre la surface et ces plans forment des courbes qui, au point K, ont une certaine courbure. Parmi elles, prenons la courbe de courbure maximale et celle de courbure minimale.

La courbure moyenne d'une surface en un point est la moyenne arithmétique de ces deux courbures.

$$\text{Courbure moyenne} = \frac{\text{Courbure min} + \text{Courbure max}}{2}$$

On dira que la surface est à courbure moyenne nulle si elle l'est en chacun de ses points.

Au cours du XIX^e siècle, un autre mathématicien (et physicien) belge **Joseph Plateau** réalisait beaucoup d'expériences avec des bulles et films de savon. Suite à ses observations, il a établi des conjectures, qui sont plus connues sous le nom de **conditions de Plateau**, sur les films de savon. Il énonce donc que le film de savon forme :

1. Des surfaces minimales à courbure moyenne nulle.
2. Des surfaces qui s'intersectent le long de courbes, trois par trois en faisant des angles de 120° $(\arccos\left(\frac{-1}{2}\right))$.
3. Ces courbes s'intersectent quatre par quatre en formant des angles de $109,47°$ $(\arccos\left(\frac{-1}{3}\right))$.

Joseph Plateau a énoncé ces conjectures suite aux observations de ses expériences avec le savon, mais il a fallu attendre un siècle pour qu'elles soient démontrées en 1976 par la mathématicienne américaine **Jean Taylor**.

Jean Ellen Taylor (née en 1944) est une mathématicienne américaine connue pour son travail sur les mathématiques des bulles de savons. Elle a publié en 1976 la première preuve des conditions de Plateau.

On remarque d'ailleurs que les films de savon vus dans les trois exemples précédents respectent les conditions émises par Plateau.

Les bulles et films de savon nous montrent que les mathématiques sont présentes partout, et que nous l'observons dès notre plus jeune âge.
La mathématicienne américaine **Karen Uhlenbeck** s'est intéressée aux problèmes de minimisation dans des dimensions plus élevées que celles que nous avons abordées. Ses théories ont révolutionné notre compréhension des surfaces minimales, disait Hans Munthe-Kaas, président du Comité Abel. C'est pour cela et pour ses autres travaux de recherches, qu'elle est la première femme à avoir obtenu en 2019 le prix Abel (l'équivalent du prix Nobel en mathématiques).

Les vidéos de cet article sont sur la chaîne YouTube : Clabe Maths.

Bibliographie

[1] Olivier Druet. *Bulles de Savon - explications*. youtube.com/watch?v=E05bgsn2ips, October 2022.

[2] Olivier Druet. *De Joseph Plateau à Jean Taylor, des bulles de savon bien inspirantes* . https://www.bnf.fr/fr/agenda/de-joseph-plateau-jean-taylor-des-bulles-de-savon-bien-inspirantes, Mars 2022.

[3] CNRS. *Pourquoi les bulles sont-elles rondes?* http://sorciersdesalem.math.cnrs.fr/Vulgarisation/Posters/PosterIsoperimetrie2013.pdf.

[4] Paul Laurain. *Mathématiques savonneuses*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00583959/document, febuary 2011.

[5] Elisabeth Abbas and Hassia Tamimou. *Le problème de Steiner*. Master's thesis, may 2014.

[6] Arnaud Durand. *Inégalités géométriques dans le plan euclidien*. http://mathix.org/linux/wp-content/uploads/2012/01/ter.pdf, may 2006.

[7] Marine Malo and Coralie Renault. *Inégalité isopérimétrique*. Master's thesis, may 2012.

[8] Wikipédia. *Carthage*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Carthage.

[9] Wikipédia. *Courbure moyenne*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbure_moyenne.

[10] Wikipédia. *Inégalité isopérimétrique*. https://fr.wikipedia.org/wiki/Inégalité_isopérimétrique.

[11] Société Mathématique de France. *Prix Abel 2019 à Karen Uhlenbeck*. https://smf.emath.fr/actualites-smf/prix-abel-2019-karen-uhlenbeck.